Martin Wagenschein:

Entdeckung der Axiomatik *

„Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, dass er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber ihm von Anfang an mit einer kalten wissenschaftlich aufgeputzten Systematik in's Gesicht springen.“

Felix Klein

(Elementarmathematik, I, 1924, S. 290)

1. Einführung

Dass Seltsames aus Selbstverständlichem ohne Rest verstanden werden kann (und sogar vieles Seltsame aus demselben Bestand von wenigen Selbstverständlichkeiten), diese griechische Einsicht ist eine Entdeckung. Sie sollte auch in den Schulen, bevor sie euklidisch benutzt wird, als sokratisch geführte Wieder-Entdeckung auftreten.

Dabei braucht nicht der Lehrer der Antreiber zu sein, der den Fluss des Verstehens-Prozesses in Gang hält. Er kann sich den Ufern vergleichen, zwischen denen jener Fluss seinen Weg sucht, bewegt allein vom Problem.

Es gibt tatsächlich motivierende Initial-Probleme der Geometrie. Sie wirken auf den von allen geometrischen Vorkenntnissen freien Anfänger im Sinne zweifelnder Bewunderung: „Zu schön um wahr zu sein!“

Das folgende Beispiel möchte zeigen, wie die Vermutung, dass der Radius eines Kreises sich, wie es seltsamer Weise zu sein scheint, genau sechsmal in der Peripherie herumspannen lasse, sich in Gewissheit verwandeln lässt durch Reduktion auf allein das dem Anfänger selbstverständliche „Translations-Axiom“ (das den euklidischen Raum charakterisiert).

Nebenbei wird eine Liste geeigneter „Ufer“-Hilfen des Lehrers angelegt.

Sie und das angewandte Such-Verfahren erweisen sich als übertragbar: auch andere geometrische Merkwürdigkeiten (wie die Sätze von Thales und Pythagoras) werden durchschaubar durch Zurückführung auf dasselbe Axiom. Euklid oder Sokrates?: Beide! Aber die Möglichkeit einer axiomatischen Darstellung will zuerst sokratisch entdeckt sein.

*) Ein Vorläufer zu dieser Betrachtung, an einen breiteren Leserkreis gerichtet, steht unter dem Titel „Der Sechs-Stern“ im Band II meines Buches „Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken“, Stuttgart, 1970, S. 135-148

2. Genetisches Prinzip: Wissenschaftsorientierung durch Wiederentdeckung

Die griechische Erkenntnis, dass man die Sätze der Mathematik begründen und von einander ableiten kann, ist eine Entdeckung, die nicht selbstverständlich ist (vgl. K. Strubecker, „Mathematik als Hilfsmittel der modernen Erfahrungswissenschaften“. Physikalische Blätter, 1960, S. 157: „Die Erkenntnis, dass man die Sätze der Mathematik begründen und voneinander ableiten kann, verdankt man den Griechen. Erst mit dieser Einsicht wurde die Mathematik zu einer wirklichen Wissenschaft, d.h. zu einer vom speziellen Beispiel losgelösten Erkenntnis von allgemeiner Gültigkeit. In der kurzen Zeitspanne von zwei Jahrhunderten zwischen Pythagoras (um 500 v. Chr.) und Euklid (um 300 v.Chr.), in deren Mitte Plato steht, haben die Griechen diese gewaltige Geistesarbeit geleistet…“). Es gibt Wis-

sensbereiche -etwa die historischen- denen Derartiges fehlt. In der Physik haben wir zwar die Newtonsche Mechanik. Aber aus ihr kann nicht einmal die Existenz elektrischer Phänomene geschlossen werden.
Wenn ein Unterricht „wissenschafts-orientiert“ sein will, dann sollte eine fundamentale Entdeckung in ihm auftreten als das was sie ist, eine Entdeckung. Man kann kaum umhin, bei dem Wort „orientiert“ nicht an das „Aufgehen“ der wissenschaftlichen Gestirne zu denken.
Eine Entdeckung wird am wirksamsten durch ihren nicht-rezeptiven Nachvollzug verstanden und behalten; durch eine, sei es auch nur bescheidene „Wiederentdeckung“. So definieren Freudenthal und Wittenberg unabhängig voneinander das genetische Prinzip.
Wer gar der Überzeugung ist, dass in der Demokratie der Schulunterricht in erster Linie (nach Rang- und Zeitfolge) für den potentiellen Laien da ist, der muss wünschen, dass jeder ein Anrecht habe auf die Einsicht, woher denn Mathematik „kommt“, und dass sie einem jeden aufzugehen vermöge. Eine große wissenschaftliche Leistung kann zu einem didaktischen Verhängnis werden.
So hat der Mathematiker Euklid den Pädagogen Sokrates in eine Ecke gedrängt, in eine zwar vornehme, aber für den Lehrer anspruchsvolle, unbequeme Ecke; und entsprechend Newton den noch dialogisch lehrenden Galilei. Seit Euklid haben so scheint es, die Entdecker eine Scheu zu sagen „wie sie darauf gekommen sind“. Sie zeigen sich lieber als Sieger denn als Sucher. So haben sie es schwer, gute Lehrer zu werden. Sie deduzieren gern, denn da kann, wenn alles stimmt, keiner widersprechen und jeder „kann folgen“. Er wird nur gefragt „Kommen Sie mit?“, und nicht „Fällt Ihnen zu dem Problem etwas ein?“ Er gewöhnt sich ab zu fragen: „Wie sind Sie darauf gekommen?“
Es geht also um „Wieder-Entdeckung“. (Freudenthal, Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben?, MU, 1963/4, S. 14.) „Wiederentdeckung unter Führung“; (Wittenberg, A.I.: Bildung und Mathematik, Stuttgart: 1963. S. 67.): „Wiederentdeckung einer Wissenschaft von Anfang an“. Der Zusatz Freudenthals „unter Führung“ ist zwar selbstverständlich, aber nicht unnötig für solche, die bereit sind misszuverstehen, als könne gemeint sein, die Schüler „sollten alles allein entdecken“).

3. Sachliche Motivation

Der Lehrer in Person ist dabei nötiger als bei jedem anderen Verfahren. Und die Frage, die in das folgende Beispiel mit hineingenommen werden soll, ist diese: Wie kann er es erreichen, dass
a) nicht er, der Lehrer, das Problem stellt, sondern dass es sich selber „stellt“ aus einem vom Lehrer vorgelegten, (exponierten) Material?
b) nicht der Lehrer der Antreiber ist, der den Verstehensprozess in Fluss hält, sondern dass er gleichsam die Ufer bildet, zwischen denen dieser Prozess, möglichst allein vom Problem getrieben, weiter sucht?
c) dass der Lehrer (also) nicht die Antwort stückweise preisgibt (etwa: „Was siehst du, wenn du *A* mit *0* verbindest?“ oder „Vergleiche die Dreiecke I und II!“) sondern nur durch allgemeine (an das spezielle Problem nicht gebundene, „transferierbare“) „Regeln zur Leitung des Geistes“ (möchte man in Anlehnung an Descartes sagen) den suchenden Schülern „beisteht“.
Kurz: beim „genetischen“ Lehren hat die „sachliche Motivation“ den Vorrang. Wir sind in den Naturwissenschaften und in der Mathematik in der glücklichen Lage, dass es hier für den Anfänger, den noch

Unwissenden, wirklich rein sachliche Motivation gibt, erste Beweggründe des Denkens, Initial-Motivationen (nicht nur „Interessierendes“ oder gar vom Lehrer interessant Gemachtes.
In den besten solcher problematischen Situationen braucht der Lehrer nur das geeignete Phänomen (eine Figur, ein Tun, ein Geschehen) stumm zu exponieren, und das Problem erhebt sich daraus von selbst und „ruft“ fast jedem Betrachter zu (wie Hilbert es formuliert haben soll): „Hier bin ich. Suche die Lösung!“ (Nach Leonard Nelson: Die sokratische Methode. In: Gesammelte Schriften Bd. I, S. 271 ff. (Meiner, Hamburg, 1973).

4. Initialprobleme der Physik

Für den Bereich einer keimenden Physik sind solche Initialphänomene leichter zu finden als in dem der Mathematik. Wenn eine rollende Kugel (oder gar ein mit Menschen besetzter Wagen) am höchsten Ort einer Looping-Bahn nicht stürzt, so ist das für den Naiven „seltsam“ und beunruhigend.
Wenn man ein Glas unter Wasser füllt, und dann, die Öffnung nach unten kehrend, zum Teil heraushebt: warum fällt das Wasser nicht heraus, wie es sich gehört?
„Wie es sich gehört“ das heisst: wie sonst immer; wie wir es gewohnt sind. Wir nennen derartiges „seltsam“, weil es selten ist. Wir sagen es sei „sonderbar“ oder „absonderlich“, da es abgesondert, außer der „Reihe“, erscheint.
Das, was hier ein Stutzen, Nachdenken, Eingreifen motiviert, ist also mehr „Beunruhigung“ als „Staunen“. Die Ordnung ist gestört, das Vertrauen erschüttert, es muss wieder hergestellt werden. Das zeigen deutlich die Erfahrungen schon an Vorschulkindern. (Näheres in: M. Wagenschein, A. Banholzer S. Thiel: Kinder auf dem Wege zur Physik. Stuttgart: 1973. S. 10-16; 43.)

5. Initialprobleme der Geometrie

Auf dem Vorfeld der Mathematik scheinen die Auslösungen zum Teil ebenfalls aus Beunruhigungen hervorzugehen: Fast alle Zweijährigen äußern höchste Verwunderung darüber, dass der Mond „immer mitgeht“. Die Befremdung über solche parallaktischen Phänomene der geometrischen Optik kann sich bis fast zur Panik steigern, wenn entfernte Bäume davongehen (vgl. Wagenschein-Banholzer-Thiel, a.a.O.). Weiter „oben“ in der Mathematik gibt es die natürlich sehr beunruhigende „Sache mit der Quadratwurzel aus 2“. Aber sie liegt schon nicht mehr im „Erdgeschoss“, worauf ich hier das streng „genetische“ Vorgehen beschränken möchte.
In vielen Fällen, wenigstens der Geometrie, scheint der Auslöser aber nicht Beunruhigung (Verwunderung) sondern eine mit Zweifel gemischte Bewunderung für eine auffallende Vollkommenheit zu sein; als fragte man: Ist das nicht „zu schön, um wahr zu sein?“
So, dass die drei Mittellote eines jeden Dreiecks in rätselhaftem Einvernehmen auf denselben Punkt streben, nicht anders die Winkelhalbierenden (Einstein spricht einmal von dem Erstaunen, dass er als Kind darüber empfand), und dass auch die drei Winkel „voneinander wissen“. So auch das Thema der vorliegenden Betrachtung: Der Radius des Kreises lässt sich, wie es scheint, gerade sechsmal in der Peripherie herumspannen. (Über die Gedanken von Kindern bei „Zirkelspielen“' die sich hier anschließen, siehe: 1. O.F. Bollnow, Frühe Kindheitserinnerungen, in: Einfache Sittlichkeit. Göttingen: 1947. S. 205, und 2. M.L. Kaschnitz in: Tage, Tage, Jahre. Fischer-Bücherei, Nr.1180, S. 50 f.)

Nach dem, was mir Studenten berichten, scheinen Küfer, die große Fässer herstellen, auf folgende Weise zu prüfen, ob die Öffnung auch kreisrund ist: Man spanne ein Seil über die leere Öffnung hinweg bis zum fernsten gegenüberliegenden Punkt des Randes lege dann das Seilstück einmal in sich zusammen, nehme die gewonnene Hälfte zwischen die Hände und spanne sie, immer gerade gezogen, innen am Rande herum, bis man zum Ausgangspunkt zurückgekommen ist (oder nicht).
Oder das Thales -Phänomen, auszumalen an der halbkreisförmigen Sitzreihe eines Amphitheaters: An jedem Ende steht ein Mensch. Ein dritter hat in der Reihe irgendwo Platz genommen und wendet den Blick von dem einen der beiden zum anderen: Eine Viertel„umdrehung“? Und wo in der Reihe er auch sitzt? Ist es wahr? Und „genau“?
Um durch solche Fragen ernstlich bewegt zu sein, muss man natürlich ein gewisses Alter und viele räumliche Erfahrungen hinter sich haben. - Und mir will außerdem - scheinen, es wäre gut, mit eigentlicher Geometrie vorher noch nicht beschäftigt worden zu sein. (Wohl aber viel mit spielendem Malen, Zeichnen, Basteln, Bauen und Klettern in Bäumen.)

6. Reaktionen von Unterrichteten

Auf diese Vermutung, auf den Sinn des Unterrichts überhaupt, kann man kommen in Gesprächen mit Erwachsenen, auch mit Studenten aller Fachbereiche, die traditionellen Mathematik-Unterricht in der Schule schon „gehabt“ hatten. Fragen wir sie nämlich (angesichts der Figur): „Finden Sie das eigentlich nicht merkwürdig, dass der Radius sich innen an der Peripherie gerade sechsmal herumspannen lässt? Oder stimmt es gar nicht genau?“, so kann man folgende Reaktionen hören:
„Nein, das ist so, das hatten wir schon in der Schule.“ Oder: „Mit dem dicken Stift ist's nicht genau. Aber . . mir reicht's.“ Oder: „Genau? Ich weiß nicht. Da war so etwas mit 3,14. Ist es das?“
Interessant ist nun in unserem Zusammenhang besonders das, was frühere „gute“ Mathematik-Schüler und Mathematik-Studenten, nach kurzem Nachdenken sagen: „Ja, natürlich genau. Und es ist auch klar, warum: Wenn Sie die Radien zu den Außenpunkten zeichnen, haben Sie gleichseitige Dreiecke. Da bekanntlich, die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, hat hier jeder Winkel 60°, und 6 mal 60 gibt ja 360!“

7. Bewältigen oder durchschauen

So sehr das zutrifft: ich möchte versuchen zu sagen, warum mir dabei nicht wohl ist, im besonderen, wenn auch künftige Laien in der Schule nur solche Beweisführungen lernen: Das Erstaunliche („dass es sechsmal geht“) kommt ohne Zweifel gerade daher, dass die entstehenden Dreiecke gleichseitig sind. Ist es ein guter Stil, auf das beliebig schiefe Dreieck zurückzugreifen und den allgemeinen Satz von der Winkelsumme in ihm (als ob man ihn wissen müsste, um das Erstaunliche zu klären!) als übergeordneten Machtspruch anzurufen, nur um seine Aussage dann sogleich wieder auf das besondere, das gleichseitige Dreieck zu reduzieren? Dazu kommt, dass, wer so argumentiert, und nicht gerade ein richtiger Mathematiker ist, in den Satz von der Winkelsumme gar keine volle Einsicht mehr hat. Er „weiß“ ihn eben, kennt ihn als „Werkzeug“. Deshalb durchschaut er das, was klar werden soll, nicht „bis unten hin“, sondern nur bis auf dieses Werkzeug hin. Was der kenntnisfreie und damit auch vorurteilsfreie Laie erwartet, ist: das Problem durchschauen aus den Gegebenheiten, die in dieser den Effekt („Sechs“) hervorbringenden Figur enthalten sind, und aus keinen anderen. Ebenso unnötig

„hergeholt“ wie der Winkelsummensatz ist es, hier überhaupt von „Winkel“, von „Grad“, von 360° oder 60° zu sprechen. Denn von alledem braucht man nichts zu wissen, um das hier und jetzt vorliegende Problem vollständig zu klären. Anfangs ist es bisweilen nicht leicht, einem Mathematik-Studenten klarzumachen, was man mit diesen Einwänden meint. So sehr ist er gewohnt, ein Problem nicht aus den speziellen Umständen heraus zu verstehen und zu durchschauen, die es konstituieren, sondern es mit Hilfe eines Vorrats grundlegender und allgemeiner Standardkenntnisse (an denen kein Zweifel mehr aufkommt, einem Werkzeugkasten vergleichbar) zu bewältigen und zwar schnell. Dieses Ziel ist für den Berufs-Mathematiker und den Physiker, den Techniker legitim. Für den Laien keineswegs. Er hat nicht zu bewältigen, aber er hat ein Anrecht, den Einzelfall bis auf den Grund zu durchschauen, um zu erkennen, was Durchschauen und Verstehen in der Mathematik bedeutet. Wird es deutlich, wie problematisch es ist, wenn wir Mathematiklehrer erst einmal als Mathematiker ausbilden, ohne schon sofort und innermathematisch, an seine Aufgabe zu denken, ein Lehrer zu werden?
Um es, der Wichtigkeit wegen, noch einmal anders zu sagen: Für den Schüler und späteren Laien ist das Beweisen durch Rückgriff auf irgendwann schon einmal Bewiesenes nicht das, was wir ihm wünschen dürfen. Was man sich als Laie, vor ein mathematisches Problem gestellt, wünscht, ist die Einsicht, die durchgehende (und möglichst selbst gefundene), die wie ein Blitz das Ganze bis auf den Grund durchschauen lässt, vom Problem aus bis zum Selbstverständlichen. Das ist qualitativ etwas ganz anderes als jenes Nachahmen des fachmännischen Beweisens, das dem Laien als ein Durchschreiten von verschiedenen Räumen erscheint, die er alle nacheinander passiert hat, dass er sie gesehen hat, quittiert und hinter sich abschließt, bis er am Ende in einem letzten Raum zugeben muss, vor der Lösung zu stehen.
In der Physik ist es noch deutlicher: Vor die Frage gestellt nach dem im obersten Punkt der Looping-Bahn nicht abstürzenden Wagen (siehe Seite 3) pflegt der Physikstudent, auch wenn er Lehrer werden will, erst alle seine allgemeinen Kenntnisse über das Beharrungsgesetz, die Schwerkraft und Zentrifugalkraft in sich antreten zu lassen. Unnötig: Man bleibe hart am Problem und den speziellen Gegebenheiten: Denkt man die Schiene am obersten Punkt abbrechend, so würde bei ausreichender Geschwindigkeit der Wagen ja auch nicht senkrecht herabstürzen, sondern wie ein Stein weiterfliegen. Seine Geschwindigkeit im obersten Punkt muss nur so groß sein, dass seine Wurfkurve außerhalb der (nicht abbrechenden) Schiene verlaufen würde. (Der Naive hält die Schiene für das Führende und Haltende.)
Da wir uns über den geworfenen Stein nicht wundern, ist die Beunruhigung über die Insassen des Wagens ebenfalls verflogen. Der absonderliche Fall ist reduziert auf einen harmlosen, gewohnten, er ist „beigelegt“, verstanden. Verstehen ist zunächst immer relativ. (Erst später - die Ansprüche steigen - wird dann auch der Steinwurf problematisch.)

8. Die Sokratische Methode

Bei dem im Folgenden angedeuteten Wieder-Entdeckungs-Prozess stelle man sich eine kleine (nicht mehr als 20 Teilnehmer umfassende) Gruppe vor: Heranwachsende oder Erwachsene, geometrisch Unwissende wie auch schon Unterrichtete, nicht zuletzt Mathematik-Studenten, die fähig sind (oder es werden wollen), zugunsten einer „Regeneration“ ihre Kenntnisse wie hinter einen Vorhang eine Zeitlang abzulegen.

Die Form, in der das Gespräch wiederholt erprobt wurde, ist das Unterrichtsgespräch im sokratischen Sinne. Die „Führung“, auf die der Lehrer sich beschränkt, ist in ihrer härtesten Form durch Leonard Nelson praktiziert und beschrieben worden. (L. Nelson: Die sokratische Methode. Gesammelte Schriften Bd. I (S. 271 ff) Meiner, Hamburg, 1973. (Einzelausgabe, 3. Aufl., Göttingen, 1931). „Seine *(des Sokrates)* pädagogische Größe liegt darin, dass er, …die Schüler auf diesen Weg des Selbstdenkens weist und durch den Austausch der Gedanken eine Kontrolle einführt, die der Selbstverblendung entgegenwirkt“ (S. 26). Nelson hat die unvollkommenen Anfänge der Methode radikal zur Vollendung geführt. „…hier hängt alles von der Kunst ab, die Schüler von Anfang an auf sich zu stellen, sie das Selbstgehen zu lehren, ohne dass sie dadurch allein gehen, und diese Selbständigkeit so zu entwickeln, dass sie eines Tages das Alleingehen wagen dürfen, weil sie die Obacht des Lehrers durch die eigene Obacht ersetzen.“ (31). Der Lehrer fragt nicht, noch antwortet er. Sein Beistand ist nicht fachspezifisch und beschränkt sich auf Anmerkungen folgender Art: „Wissen Sie noch, was Sie eben gesagt haben?“ - „Was meinen Sie mit Ihren Worten?“ -„Wer hat zugehört?“ - „Wer hat verstanden, was eben gesagt worden ist?“ - „Von welcher Frage sprechen wir eigentlich?“ Man kann diese Reihe fortsetzen: Was wollten wir eigentlich? Wie weit sind wir?

Entscheidend ist, dass diese Anmerkungen den Gedankengang nicht drängen, sondern im Gegenteil stauen. Also nicht ungeduldig (Blick auf die Uhr): „Noch eine Frage?“ sondern nachdenklich: „Ich kann mir nicht denken, dass alle ja dazu sagen.“ Dass also der Lehrer überhaupt nicht auf schnelle Zustimmung, sondern auf Einwände hofft, ja den Mut hat und die Ruhe des Sokrates, „die nach Wahrheit Suchenden in die Irre gehen und straucheln zu lassen. Ja …sie in die Irre zu schicken.“ (Nelson S. 26) Der Lehrer wird deshalb sogar (ich weiß nicht, ob Nelson das getan haben würde) jetzt fachspezifisch (über die Sache mitredend) die Rolle des Verunsichernden annehmen dürfen. (Wobei seine Gesamthaltung und das Einvernehmen der Gruppe es ausschließen müssen, an selbstgefällige List zu denken.) Die Nelsonsche Strenge in der Schule durchzuhalten, ist für alle Beteiligten anspruchsvoll und rigoros, sie kann schon unter fortgeschrittenen Studenten, wie Nelson selbst sagt, eine „Nervenprobe“ werden. Wir werden deshalb mehr und spezielleren Beistand geben als er, etwa in der Art Polyas. (G. Polya: Schule des Denkens (How to solve it). Bern: 1949. (Sammlung Dalp, Bd., 36), Vorsatzblatt.) „Was ist unbekannt? Was ist gegeben?“ „Hast du alle Daten benutzt?“ Eine seiner Regeln benutze ich dagegen nicht: „Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?“ Denn das ist eine Regel schon für Fortgeschrittene, ich beschränke mich hier auf Anfänger oder solche Wissende, die lernen wollen, sich wieder an den Anfang zurückzuversetzen (Lehrer also). Das Ziel, von dem hier die Rede ist, ist nicht das Aufgabenlösen des Mathematikers und auch nicht das des Amateurs. (Bei den Aufgaben die man hinten in der Zeitschrift „Archimedes“ findet, üben sich Mathematiker und auch Amateure um in ihren Kenntnissen und Fertigkeiten fit zu bleiben. Das meine ich nicht, ich denke an den künftigen Laien und sein Anrecht, an einigen Beispielen zu durchschauen, was es in der Geometrie heißt, aus dem Seltsamen das Selbstverständliche zu machen. Natürlich ist das ein Teilziel auch für den späteren Mathematiker.)

Ich bin also nicht der Meinung, man müsse als Laie viel Mathematik „können“, um Mathematik zu verstehen. Ich vermute, dass der Misserfolg des Mathematikunterrichts bei so vielen Laien eine Folge dieses Vorurteils der Schule ist.

9. Die Idealität der geometrischen Figuren

Die Frage, ob „es genau sechsmal geht“ setzt bei den Teilnehmern eine gewisse Reifestufe voraus: es muss ihnen klar sein, dass der Kreis, den wir zeichnen, nicht der Kreis ist, den wir meinen, sondern nur sein körperlicher Stellvertreter. (Wer glaubt, es genüge, einen recht spitzen Zirkelstift zu nehmen, braucht nur durch eine Lupe zu blicken.) Ich weiß leider nicht genau, von welchem Alter an Kinder die Idealität der geometrischen Figuren verstehen, habe mich aber immer gewundert, dass es recht früh so weit zu sein scheint. Andererseits habe ich Mathematik-Studierende technischer Zielrichtung gefunden, denen das noch nicht klar zum Bewusstsein gekommen war, in der Schule nicht und im Studium nicht. Erst das Buch eines Mathematikers, nämlich A. Rényi, der diese Erkenntnis wichtig genug fand, einen ganzen fiktiven sokratischen Dialog darüber zu schreiben, brachte sie zu einem nachdenklichen „Ach ja…“ (vgl. Alfréd Rényi, Sokratischer Dialog. In: Neue Sammlung, 1966, S. 284-304, und in dem Buch: Dialoge über Mathematik, Budapest 1967, Deutsche Ausgabe bei Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, S. 5-44. „Es liegt geradezu daran, dass die (mathematischen) Gegenstände nicht wirklich, sondern nur in dem Maße, als die Mathematiker sie denken, existieren, dass wir die ganze Wahrheit über sie herausbringen können“ (S. 293)). Dieser Rényi'sche Dialog sollte, meine ich, in allen Schulen gelesen werden.

10. Die Formulierung der Frage

Der Zirkel wirkt auf Kinder und Naive fast schon wie ein magisches Instrument. Er „übersteigt“ vornehm die Strecke, die er doch meint; er lenkt von ihr ab. Anfangs sollte sie sichtbar sein. Deshalb wählen wir ein Seil. Der Gegenstand unseres Nachdenkens ist die Abb. 1.
„Es sieht ganz so aus“, als ginge es „wirklich“ und „genau“ sechsmal. Hier kann die Diskussion um die Idealität der Figur, wenn nötig, wieder aktuell werden. Es wird klar, dass die Frage „empirisch“ nicht entschieden werden kann. Schon eine Abweichung von 1 Promille würde bedeuten: nicht genau. (Wer hier sagt: „mir reichts!“' hat Geometrie zu früh begonnen. Wer es lebenslang sagt, sollte durch sie nicht bedrängt werden.)

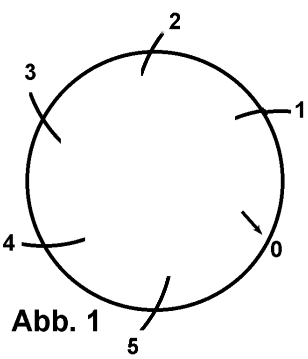


Abb. 1

Schon die Frage muss von den Schülern formuliert werden. Man kann nicht vorher wissen, was sie sagen. Dazu gehört, dass auch ausgesprochen wird, warum hier etwas Verwunderliches, also Zweifel Erregendes vorliegt: Weil es auch „genau so gut“ anders sein könnte. Warum nicht 5.98 mal? Nützlich ist der Vergleich mit der anderen Frage, wieviel mal der Radius (als Seilstück) außen herum*gebogen* werden kann? Offenbar nicht 6 mal. Offenbar mehr als 6 mal. Also dann 7 mal?
Das volle Verstehen der Fragestellung ist notwendig, um das Suchen zu motivieren. Dazu gehört, dass man (Wertheimer, M.: Produktives Denken. Frankfurt a.M.: 1957. S. 62-78) das „Problem ernsthaft ins Auge fasst“, ohne Zeitdruck also, „nicht mit stückhaft verbissener Sorgfalt“, sondern „strukturell“. „Erwartend“ schreibt Simone Weil (S. Weil: Über den rechten Gebrauch

des Schulunterrichts… , zum Teil abgedruckt in meinem Buch :„Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Stuttgart: Bd. I , 2. Aufl., 1970. S. 354f.) („vor allem soll der Geist leer sein“).

11. Das Anlaufen des Suchprozesses

Die erste „Ufer-Hilfe“, die erste allgemeine Regel kann sich sofort ergeben, wenn ein Teilnehmer etwa das einwendet, was im letzten Absatz des Abschnitts 6 stand, und der Lehrer oder ein anderer Teilnehmer dann erwidert, was zu Anfang des Abschnitts 7 gesagt wurde.

Regel I: Benutze nur das, was wir in die Figur eingebracht haben (das „Gegebene“), das aber vollständig. Sonst benutze nichts außer dem Selbstverständlichen.

Sollte dann niemand die Radien zeichnen, die zu den 6 Punkten führen, so kann die nächste Regel folgen:

Regel II: Alles Eingebrachte sollte sichtbar sein.

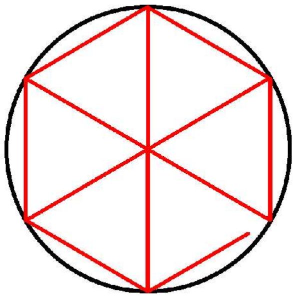


Abb. 2

Dann werden die gespannten Seilstücke kommen und da man ihnen ja nicht ansieht, dass sie so lang wie die Radien sind, auch die beteiligten Radien. Schließlich wird es gut sein, allem was gleiche Länge hat, auch dieselbe Farbe zu geben. Dann wird alles rot, nur der Kreis nicht. Es entsteht Abb. 2.

(Wir zeichnen sie in ihrer Unsicherheit. Sie *muss* sich ja nicht schließen!)

Alles ist rot außer dem Kreis. Vielleicht genügt das für einen der Teilnehmer, um ihn stumm wegzuwischen.

Wahrscheinlich ist es aber nötig, dass der Lehrer die Regel empfiehlt:

Regel III: Können wir die Figur vereinfachen, indem wir Überflüssiges wegwischen?

Dann wird der Kreis sofort geopfert. Bisher die „Hauptperson“! Das deutet darauf hin, dass die ganze Sache vielleicht nicht so schwierig ist, wie man dachte. Denn das Geradlinige ist doch wohl immer leichter zu durchschauen als das Krumme. Aber Regel III ist problematisch: Wie entscheidet man denn, was „überflüssig“ ist? Darüber wird lange gesprochen werden. Das Ergebnis: Entbehrlich ist das, dessen Preisgabe das Problem nicht antastet, so dass es unvermindert, unverkürzt bestehen bleibt. Der Rückweg muss offen bleiben. Aber: Das Problem muss neu formuliert werden in der „Sprache“ der neuen Figur, als ob es nie einen Kreis gegeben hätte.

Regel IIIa: Nach jeder Vereinfachung der Figur ist das ursprüngliche Problem neu zu formulieren, und es ist zu prüfen, ob es unverkürzt dasselbe geblieben ist.

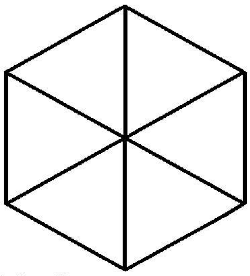


Abb. 3

Nun hat man längst die gleichseitigen Dreiecke in der vom Kreis befreiten Abbildung 3 bemerkt. Gleichseitige Dreiecke, also selbstverständlich auch gleicheckige. (Denn wer in einer Ecke Platz nimmt, hat immer, in welcher er auch sitzt, die gleiche Situation vor sich: zwei gleiche Seiten rechts wie links und eine ebensolange gegenüber. Der Begriff des Winkels ist überflüssig. Es geht um Ecken.) Und wie lautet jetzt das Problem?

Da sind gleichseitige Dreiecke (als „Bauklötze“ zu denken). Von „Radius“ und „Kreis“ brauchen sie nichts mehr zu „wissen“. Lassen sich gerade 6 von ihnen lückenlos rundum zusammenschieben?

(„Rundum“: die letzte Erinnerung an den „Kreis“) Offenbar ist das die unverkürzte Frage. (Denn: tun sie es, so lässt sich der Kreis wieder um das Sechseck herumlegen, und die Frage ist auch für ihn beantwortet.)

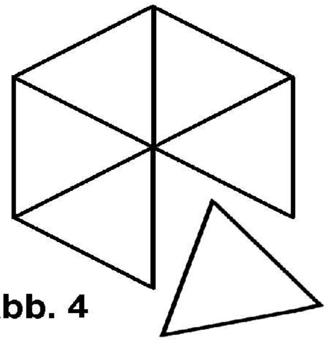


Abb. 4

Dieses Zusammenschieben muss unbedingt mit Pappdreiecken (als Stellvertretern) *getan* werden. Es „sieht so aus“, als wäre das Gewünschte „selbstverständlich“. Aber keineswegs: Mit 5 Dreiecken geht zwar alles zunächst zweifellos gut. Es entsteht eine Tafelrunde mit einem freien Platz. Das 6. Dreieck wartet draußen. Passt es nun in die Lücke oder nicht? „Muss“ es passen? (Abbildung 4)

Gelegenheit, zu verunsichern durch gespielte Sicherheit: Natürlich muss es passen, denn es passt ja rechts und auch links. Was wollen wir mehr?

Eine Klippe der Formulierung. Sie darf nicht überrannt werden. Es genügt nicht, zu sagen, dass das 6. Dreieck „sowohl“ rechts „wie auch“ links genau „passt“. Es könnte den einen Nachbarn überdecken, während es bei dem anderen anliegt. Es könnte auch einerseits anliegen und drüben gar nicht zur Berührung kommen. (Der Schuh ist zu weit.) Man wird also etwa sagen: Wenn das 6. Dreieck auf der einen Seite anliegt, so muss es, ohne dass es verschoben wird, auch drüben anliegen. Besser wohl: Es muss genau *eine* Stellung des letzten Dreiecks geben, in welcher es zugleich links wie rechts anliegt. - Das ist nicht selbstverständlich, also zu beweisen:

Unter den verschiedenen Vorschlägen, die jetzt kommen, wird wahrscheinlich auch der einfachste sein: *noch* einmal etwas zu opfern: Genügt nicht die halbe Figur? Kommt diese Idee nicht (bisweilen erscheint sie schon vor der Preisgabe des Kreises), so kann der Lehrer ihr Auftauchen begünstigen durch eine neue allgemeine

Regel IV: Was einmal geholfen hat, das kann auch ein zweites Mal (oder bei anderer Gelegenheit) helfen.

(In ähnlicher Form findet sie sich auch bei Polya.)

Nun muss wieder nach Regel IIIa das Problem neu formuliert werden: Wenn wir drei der gleichseitigen Dreiecke aneinander schieben, so ist es nicht selbstverständlich, dass sie mit einer Geraden abschließen. Tun sie es, dann ist alles gut. - Man kann auch anders fragen: Legen wir eine Gerade (ein Lineal) hin und setzen auf ihr zwei der Dreiecke nebeneinander, passt dann das dritte genau in die Lücke?

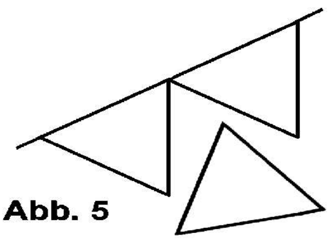


Abb. 5

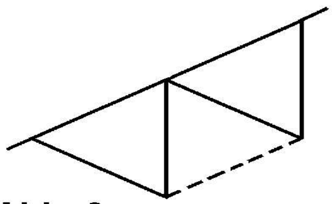


Abb. 6

(Wenn ja, brauchten wir nur eine zweite solche Dreiergruppe anzugliedern und wir hätten, was wir hofften.) Die zweite Fassung scheint eher als die erste zu einer einfachen Lösung zu führen. (Abbildung 5)

Man darf annehmen, dass bald einer sieht, worauf es ankommt: ob die Strecke, die die beiden Spitzen überbrückt, ebenfalls gleich der Dreiecksseite ist. (Abbildung 6)

12. Der Einfall

Hier ist, scheint es, der Kulminationspunkt des Verstehensprozesses erreicht. Hier muss dem Betrachter etwas einfallen. Soviel ich sehe, ist keine „Ufer-Hilfe" möglich. Es kommen, wie ich in verschiedenen Abläufen des Themas erfahren habe, mehrere Vorschläge, zunächst meist aus der Schule gewohnte: Höhen einzeichnen, die Figur ausbauen (auch das ist erlaubt). Es kommen aber auch höchst originelle. Ich werde im Anhang (S. 16) zwei nennen. (Sie sollen hier nicht verfolgt werden, weil sie kaum so leicht zu einer „Selbstverständlichkeit" führen (einem „Axiom") wie der folgende. Im Unterricht dürfen sie keinesfalls deshalb einfach abgewiesen werden.)

Man kann diese Einfälle verfolgen, oder auch zurückstellen; jedenfalls darf man sagen, es gebe einen, einfacher als sie alle. (Zum ersten Mal hörte ich ihn von einem jungen Assistenten, der nicht Mathematik betrieben hatte, einer der sich mit Sprache beschäftigte und pädagogisch mit Schwachbegabten.) Der Einfall besteht darin, dass man die beiden Dreiecke, I und II, da sie doch dasselbe Dreieck sind, als *ein* Dreieck in zwei verschiedenen Lagen sieht: Nicht zwei Dreiecke, I und II, sondern *das* Dreieck, auf die Gerade gesetzt, dort skizziert, und dann längs dieser Geraden verschoben, bis es an die erste Lage angrenzt, also um die Seitenlänge, Das ist eine Umstrukturierung der Situation aus einer fixierten in eine bewegliche, Umsetzung in Handlung. Manche sehen nach diesem Gedanken auch sofort, wozu er gut ist.

Wenn nicht, kann man sagen: Stellen Sie sich dieses Schieben ganz langsam und eindringlich vor. Das ganze Dreieck, nicht bloß sein Rahmen, rutscht. Man mache es auf sandiger Ebene, rauh, dass es schrammt.

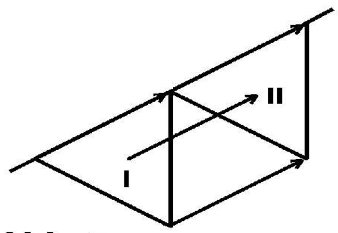


Abb. 7

Dann kann es zu der Einsicht kommen: Alle Punkte des Dreiecks legen offenbar auf dem Sandboden dieselbe Spur zurück. Alle diese Spuren sind Strecken von gleicher Länge. Alle sind parallel. Und alle sind so lang wie die Dreiecksseite: man sieht es an den unteren Eckpunkten (Abbildung 7).

Also gilt dasselbe auch für die Spitze!

Nicht jeder bemerkt sofort, dass damit das Ziel erreicht ist. Aber fast alle haben das Gefühl, zuletzt eine offene Tür eingerannt zu haben. Und so ist es auch.

13. Ergebnis

Es ist unbedingt notwendig, hier zu verweilen, und die Gruppe nun sich darüber aussprechen und klar werden zu lassen, was eigentlich geschehen ist. Sind wir fertig? Ist es nun sicher, (dass „es sechsmal geht")? Die Frage liegt schon weit zurück. Man muss den ganzen Weg noch einmal durchlaufen, hin und zurück: Die Parallelverschiebung geht immer. Sie ist selbstverständlich. Deshalb passt das dritte Dreieck zwischen die beiden anderen, wie wir sahen. Deshalb sitzen drei Dreiecke fugenlos aneinan

der auf der Geraden. Deshalb kann man eine ebensolche Gruppe von der anderen Seite der Geraden heranschieben. Das Sechseck, das fugenlose, ist fertig. Durch seine Ecken führt ein Kreis. Sein Radius ist genau sechsmal in seiner Peripherie herumgespannt. Etwas ganz und gar nicht Selbstverständliches (dass es „genau 6 mal geht" ist damit „zurückgeführt" auf etwas ganz Selbstverständliches. Es „kommt von ihm" her. Es „hängt" allein von ihm „ab", „geht aus ihm" ohne Zutat „hervor". Ist also gleichsam dasselbe. Es „muss" so sein. Damit ist es nicht mehr seltsam.
Wir haben ein Beispiel vor uns für das nur in der Mathematik Mögliche eines vollständigen Verstehens. Das höchst Sonderbare wird trivial. (Ein Gefühl der Enttäuschung lässt sich nicht verhehlen, es unterläuft den Triumph.) - (Siehe aber S. 14.)
Um das zugrunde Liegende auf seine Selbstverständlichkeit noch einmal genau zu prüfen, ist es nötig, es scharf zu formulieren. Das macht große Mühe und ist ein interessanter Teil des Gesprächs. Am Ende wird etwa folgendes dastehen:
„Es ist immer möglich, in der Ebene ein Dreieck, ja jede Figur, so zu bewegen, dass seine Punkte Spuren zurücklegen, die alle 1. gerade, 2. gleich lang, 3. parallel sind. (Was „Ebene", was „parallel", was „gerade" bedeutet, ist zunächst kein Problem). Man kann dieses „Translations-Axiom" sofort für den Raum verallgemeinern: „Es ist immer möglich, einen Körper so zu bewegen, dass…"
Dass durch unseren Such-Prozess etwas einsehbar wurde, was zuvor verschlossen erschien, durchschaubar was anfangs undurchsichtig war, ist ein intellektuelles Ereignis, das hier jedem zugänglich wird. „Es gehört zum Schönsten im Leben, Zusammenhänge klar zu überschauen", schrieb Einstein an Born (Albert Einstein an Max Born, Briefwechsel 1916-1955, Rowohlt Taschenbuch 1478, S. 25.)
Dieses Ereignis kann zunächst als lokal erscheinen, eine „Sechseck-Sache".

14. Die Aufklärung des Thales-Phänomens

Man kann aber auf den Gedanken kommen, sich zu fragen: Geht das, dieses „Beilegen" des Sonderbaren an das „Selbstverständliche"' auch sonst, bei anderen geometrischen Merkwürdigkeiten, zum Beispiel bei dem schon genannten Thales-Phänomen? (S. 4) Die Klärung kann versucht werden mit Hilfe der schon gesammelten „Regeln". Dabei sollten sie möglichst nicht wieder vom Lehrer aufgerufen werden, sie sollten auf der Tafel sichtbar zur Verfügung stehen. Dort können neue Regeln, die sich als erwünscht anbieten (hier V bis VII) angefügt werden. So entsteht unter der Hand eine wachsende Liste.
Der Verlauf der Suche wird hier nur kurz angegeben:
Formulierung der Frage (in strengerer Form als auf S. 4): „Verbindet man einen beliebigen Punkt eines Halbkreises geradlinig mit dessen Endpunkten, so scheint zwischen den beiden Richtungen immer ein Winkel vom Viertel einer vollen Umdrehung zu entstehen." (Abbildung 8)
Regeln I und II: Die beteiligten Radien werden in gleicher Farbe eingezeichnet (Abbildung 9). Der fragliche Winkel bekommt dabei zwei ungleiche Teile (α und β).

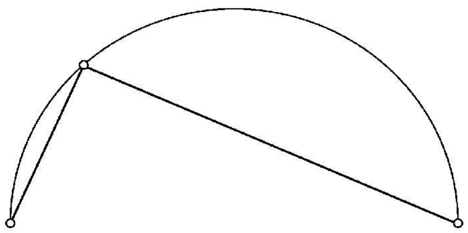


Abb. 8

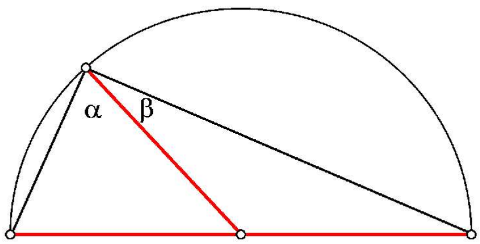


Abb. 9

Regel III: Vereinfachung?: Der Kreis ist entbehrlich, denn (IIIa): Das Problem lässt sich unvermindert ohne ihn formulieren: „Zwei Punkte liegen fest. Ein dritter hält vom Mittelpunkt der durch diese beiden bestimmten Strecke denselben Abstand wie sie. Die Richtungen, die von ihm aus zu ihnen hinzielen, bilden, wie es scheint, miteinander einen Winkel von genau dem Viertel der vollen Umdrehung."

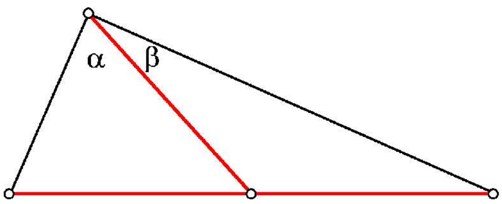


Abb. 10

Ist das richtig, verständlich?

Regel V: Haben wir ähnliches schon einmal gehabt?

Ja, aber mit dem Unterschied, dass die Dreiecke, die damals gleichseitig waren, jetzt nur gleichschenklig sind; also natürlich auch gleichwinklig an der „Basis".

Regel VI: Ist das selbstverständlich Scheinende wirklich selbstverständlich?

Ja, denn man kann „falten". - Lassen wir das gelten. Manche werden bemerken, dass man hier in den Raum aussteigen musste.

Andere möchten vielleicht in der Faltung in Analogie zum „Translationsaxiom" ein (wie es scheint von ihm unabhängiges) „Rotations-Axiom" sehen. Ein jeder Körper kann um eine Drehachse, die durch 2 seiner Punkte bestimmt ist, rotieren, d.h. alle Punkte, außer denen der Drehachse, beschreiben Kreisbögen." - Nebenbei ergäbe sich noch die reinste (von Lichtstrahlen oder gespannten Fäden unabhängige) Definition der „Strecke": Die Menge aller Punkte eines beschränkt beweglichen Körpers, die unbewegt bleiben, wenn man 2 seiner Punkte festhält. (Mündliche Mitteilung von Tania Ehrenfest-Afanassjewa)

Regeln I und II: Die Falt-Kniffe müssen eingezeichnet und die Gleichheit der entstandenen Winkel muss auch benutzt werden (Abbildung 11)

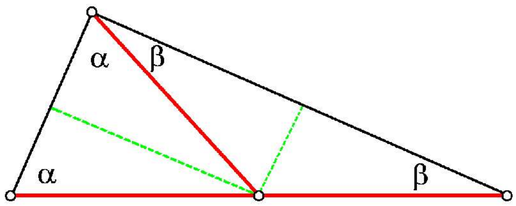


Abb. 11

Stockung wahrscheinlich; verschiedene Vorschläge. Deshalb wieder

Regel IV: Was einmal geholfen hat, kann auch in anderen Fällen helfen. Also eine Parallelverschiebung?: Verschiebt man das ganze Dreieck (nebst Zubehör) geradlinig längs seiner größten Seite um die Länge dieser Seite), dann ist nach dem Translationsaxiom (wie im vorigen Beispiel) die Verbindungsstrecke der Spitzen gleich dieser größten Seite.

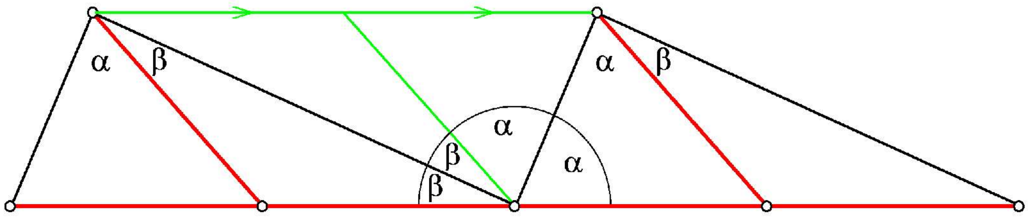


Abb. 12

Das heißt: Zwischen den beiden Dreiecken „steckt" genau dasselbe Dreieck noch einmal, auf der Spitze stehend. (Gleiche Seiten. Nichts von „Kongruenzsätzen"). Das „Zubehör" wird auch dort eingezeichnet (Abbildung 12).

Vermutlich wieder eine Stockung. Deshalb, wenn nötig,

Regel VIII: Was wollten wir eigentlich? Der Winkel mit den beiden Teilen interessierte uns. Wenn die Verschiebung zu etwas gut sein soll, muss in seinem letzten Vorkommen (im kopfstehenden Dreieck) etwas zu erwarten sein. Langsam wahrscheinlich, und mühsam, formuliert man: Seine beiden Teile α und β liegen diesem Winkel hier auch von außen an und bilden mit ihm zusammen eine halbe Umdrehung. Der gesuchte Winkel kommt also in ihr zweimal vor, fasst deshalb für sich allein ein Viertel der vollen Umdrehung.

Der Griff nach dem Automaten: „$2\alpha + 2\beta = 180°$, also $\alpha + \beta = 90°$" zeigt dessen Vorzug und Nachteil: er nimmt uns das Denken in Worten (ab).

15. Möglichkeit eines axiomatischen Aufbaus der Geometrie

Der Schüler hat ein Suchverfahren kennengelernt, das in zwei Fällen einen so rätselhaften wie zweifelhaften Fund vollkommen aufgeklärt und gesichert hat. Das Sonderbare wurde als „im Grunde" selbstverständlich durchschaut.

Die beiden „Sätze" selbst (über das Sechseck und den Halbkreis) sind dabei verhältnismäßig unwichtig. Man braucht sie nicht unbedingt zu wissen. Aber ein solches Durchschauen mit einem Mindestmaß an fremder Hilfe einmal, zweimal selber mitgemacht, „durchgemacht" zu haben, das muss man jedem wünschen. Mehr noch: die Vermutung aufkommen zu sehen, dass die letzten Selbstverständlichkeiten für alle geometrischen Probleme dieselben sein könnten, auch hier sollte er „dabeigewesen sein".

Diese Vermutung verstärkt sich, wenn er sie an noch ein paar anderen Fällen nachprüfen kann:
Die Konstanz der Winkelsumme in allen, beliebig geformten, Dreiecken, ergibt sich aus einer Translation sofort. Der Satz des Pythagoras gehört zwar nicht in die Reihe der geometrischen Initialprobleme, insofern er von einem Unwissenden dem rechtwinkligen Dreieck nicht angesehen werden kann. Er liegt nicht „parterre". (Während das Sechseck-Phänomen bei „Zirkelspielen" sich jedem aufdrängt.) Man muss auf diese Beziehung erst durch einen, der davon weiß, aufmerksam gemacht werden oder Erfahrungen hinter sich haben im Vergleichen von Flächen. Aber es ist bemerkenswert, wie schnell sich der Beweis aus zwei Translationen ergibt. Auf diesen Gedanken zu kommen, dauert eine Weile, vermutlich weil es einem unbewusst widerstrebt, die Figur zu durchkreuzen, als könne sie dabei Schaden nehmen (Abbildung 13).

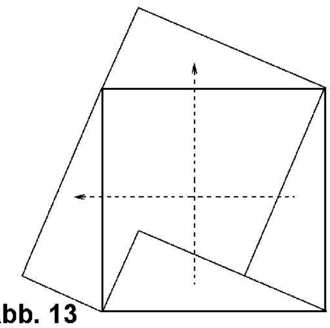


Abb. 13

Es ist nicht so wichtig, dass das Translations-Axiom sich mit Euklidischen Axiomen nicht ohne weiteres deckt. Aber der Schüler ist nun reif für die Mitteilung der griechischen Entdeckung, dass und wie Axiomatik in der Geometrie möglich ist. Das heißt: dass ihre Wahrheiten nicht vereinzelt dastehen, sondern alle aus denselben einfachsten Selbstverständlichkeiten ableitbar sind und damit vollständig durchsichtig gemacht werden können.
Das (S. 11) erwähnte Gefühl der „Enttäuschung-durch-Aufklärung" geht jetzt unter in dem Erstaunen über die Existenz eines durchdringenden Ordnungsgefüges.

16. Weiterführendes

Am Ende werden Diskussionen möglich, in denen man unsicher wird und streitet über die Kriterien des „Selbstverständlichen". Man wird anspruchsvoller.
Dabei kann der Lehrer anregen, zu prüfen, ob man den Sechseck-Satz oder den Thales-Satz auf die Kugeloberfläche übernehmen kann. Denn das Verschieben von Figuren innerhalb dieser Fläche ist offenbar möglich.
Nach Experimenten auf einem schwarzen Globus erweist es sich als mühsam, reizvoll und also lohnend, das Ergebnis in Worte zu fassen. Es entsteht schließlich so etwas: Das Translationsaxiom gilt auf der Kugeloberfläche nicht. An seine Stelle tritt die folgende Aussage: Auch auf der Kugeloberfläche ist es möglich, jede Figur in beliebiger Richtung „geradlinig" zu verschieben. Aber dann ist immer nur *eine* „Spur" „richtungstreu" (weder nach rechts noch nach links abweichend), während alle anderen zwar untereinander parallel aber nicht gleich lang und nicht „gerade" sind. Man sieht, wie es weitergehen könnte. -

17. Schlussbemerkung

Ich möchte hier schließen. Auch der Unterricht könnte es, soweit er *allen* Schülern gilt. Denn jeder hat ein Anrecht erfahren zu haben, was hier sich auftut: ein Gebiet, auf dem es Gewissheit gibt, Genauigkeit und Verstehen, und zwar ein restloses: ein Durchschauen absonderlicher, zuerst unglaubhafter

Beziehungen innerhalb einer Figur; durch einen Entdeckungsprozess, der in diesem Seltsamen als „Grund“ nichts als Selbstverständliches enthüllt. Und mehr als das: ein Gebiet, in dem es möglich ist, alle Merkwürdigkeiten auf wenige evidente Grundwahrheiten zurückzuführen. Die so eröffnete Axiomatik legitimiert erst (für Schüler und Lehrer) das umgekehrte Verfahren, nun auch deduktiv von ihr Gebrauch zu machen.

Solche genetisch-sokratischen Entdeckungszüge sind nicht umsonst. Sie fordern Zeit. Doch sind sie nicht zeit-„raubend“, sondern zeit-„lohnend“. Es versteht sich, dass das genetisch-sokratische Verfahren nicht den ganzen Unterricht beherrschen kann. (Es wird „exemplarisch“ auftreten.)

Ein Missverständnis wäre es aber, solche Unterrichts-Epochen als Feierstunden-Unternehmen einzuschätzen. Sie *tragen* den ganzen Unterricht, so wie die Pfeiler die Brückenbögen möglich machen. Pfeiler sind nicht Ornamente. Sie rechtfertigen erst, zu anderer Zeit, da wo es notwendig ist, ein schnelles, dozierendes, demonstrierendes Vorgehen, (das diesen Bögen entspricht). Es wäre für große Schülergruppen (100 und mehr) möglich, vorausgesetzt dass sie zuvor in kleinen Untergruppen (20) das totale Selber-Verstehen als intellektuelles Ereignis erfahren hätten.

Gibt es dafür ein günstigeres, ein wirksameres Verfahren als das (hier angedeutete) sokratisch geführte, und allein sachlich motivierte Unterrichtsgespräch der kleinen Gruppe, in welcher jeder Teilnehmer verantwortlich wird für das Verständnis jedes anderen und das Einvernehmen aller?

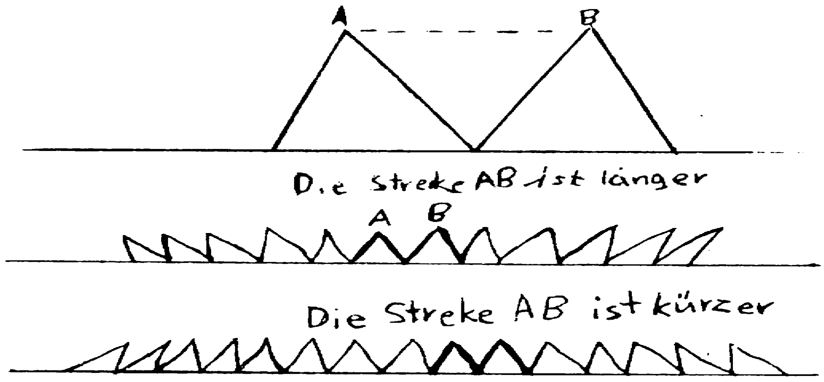
Um eine solche Gruppe zu Wiederentdeckungen zu führen, muss der Lehrer versuchen, in den Stand der Naivität - der „zweiten“ - zu gelangen. Und die „Regeln“, die sich hier etwas aufdringlich abgesondert haben (um gröbere „Hilfen“ zu verdrängen), sie sind zu demselben Ende da wie der Lehrer selber: sich überflüssig zu machen.

Anhang

Die auf Seite 10 erwähnten Vorschläge zweier Schüler einer schweizerischen Freien Schule (der „Ecole d'Humanité“ in Goldern, Berner Oberland), die ich mit der freundlichen Erlaubnis ihres Lehrers Herrn Gerard Cool wiedergeben darf:

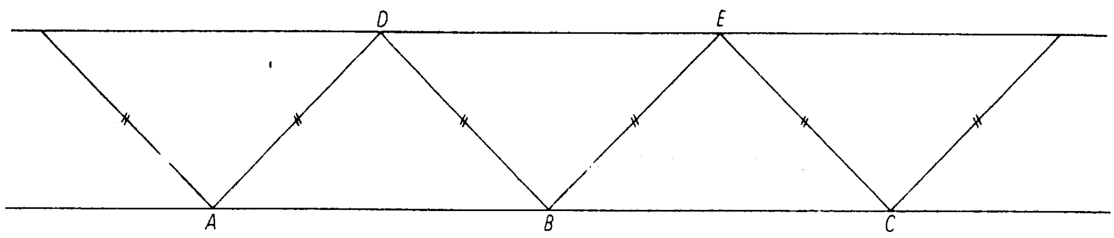
I. C.E. (15 Jahre alt)

Begleittext des Schülers:



„Ich überlegte mir Folgendes. Wir dachten uns eine Gerade und setzten zwei Dreiecke drauf.
Wenn nun die Strecke AB gleichlang wäre wie eine Dreieckseite, hätte ein Dreieck drin Platz.
Beweis?
Wenn man nun auf die gedachte Gerade noch weitere gleichseitige Dreiecke setzen würde, müssten, wenn die Strecke AB länger wäre als eine Dreieckseite, die Spitzen der Dreiecke immer mehr nach außen zeigen. Wenn AB kürzer wäre, zeigten sie mehr nach innen. Es würden also stumpfwinklige Dreiecke. Das darf es aber nicht geben, weil wir gleichseitige Dreiecke angenommen haben.“

II. G.T. (16 Jahre alt)



Begründung des Schülers, formuliert vom Lehrer:

1) Eine gebrochene Zickzacklinie gleicher Streckenlängen ist zwischen zwei Parallelen eingeklemmt.
2) Die Abschnitte auf beiden Parallelen müssen dann alle gleich sein.
3) Nimmt man nun den Parallelabstand so, dass z.B. AB = AD wird, dann wird auch automatisch DE = AB = BD sein.

Unsicher machte es ihn, ob der Schluss von 1) auf 2) (intuitiv) selbstverständlich genug sei.